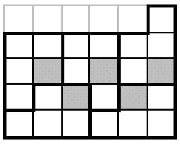
2-й етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2012 р.
Відповіді та вказівки.

6 клас

1. Відповідь: 42 хвилини. До зустрічі Пєчкін проїхав шлях, в шість разів більший, ніж пройшов Матроскін. На той час, коли Пєчкін повернувся назад, Матроскін пройшов ще стільки ж, скільки до зустрічі. Отже, за 30 хвилин йому залишилося пройти в п'ять разів більше, ніж було їм пройдено до зустрічі. Тобто, до зустрічі з Пєчкіним Матроскін йшов 6 хвилин. Отже, на весь шлях він витратив $6+6*6=42$ (хв.).

2. Відповідь: Ні, не можна. Розіб'ємо таблицю на 16 квадратів 2×2. Тоді хоча б в одному з цих квадратів опиниться не менше двох зафарбованих клітинок, і ці клітинки будуть сусідніми.

3. Розв'язок:

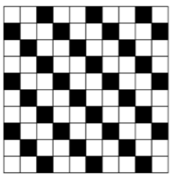


4. Розв'язок. Рівність $AB\times CD=MLNKT$ не можлива, оскільки найбільший можливий добуток двозначних чисел $99*99<100*100=10000$.

5. Відповідь. У третьому ящику 8 горіхів. Розв'язок. Позначимо через x, y і z кількості горіхів в кожному з трьох ящиків. Склавши дві рівності $x+6=y+z$ і $y+10=x+z$, одержимо, $2z=16$, звідки $z=8$.

7 клас

1. Відповідь: так, можна. Наприклад, якщо зробити 33 постріли в клітинки, відмічені на малюнку.



2. Відповідь: не можна. Нехай перші дев'ять простих чисел якось розставлені в клітинках квадрата. Серед них є рівно одне парне число - 2. Сума чисел в рядку, що містить двійку, - парна (сума двох непарних і одного парного чисел). У рядках, що не містять двійку, сума чисел непарна, отже суми чисел в якихось двох рядках різні і одержати магічний квадрат не можна.

3. Відповідь: на вагах залишилася гиря масою 1 грам. Оскільки в кожен момент часу маси на чашах вагів відрізнялися хоча б на 1 грам, то для того, щоб переважила протилежна чаша, необхідно забрати гирю масою не менше два грами. Отже, виходячи з класу, жоден учень не міг забрати гирю масою 1 грам.

4. Відповідь: 9758642031.Рішення. Зрозуміло,що число не може мати більше ніж 10 цифр, крім того воно повинно бути десятицифровим, бо таке число завжди більше від числа, що має меншу кількість цифр. Тепер просто будемо записувати цифри шуканого числа, беручи до уваги, що у двох чисел з однаковою кількістю цифр більшим є те, у якого більшою є цифра у більшому розряді. Таким чином будемо ставити відповідні цифри по місцях. 975 перші три цифри, зрозуміло, що другою цифрою не може бути 8, так само і третьою. 975864 – перші шість цифр. Далі не може стояти 3, тому повинно стояти 2, а тому останні цифри ставляться таким чином 9758642031.

5. Остача від ділення непарного числа на 4 може бути або 3, або 1. Якщо серед чисел a, b, c є хоча б два числа, залишки від ділення яких на 4 дорівнюють 1, той їх добуток при діленні на 4 також дає остачу 1. Отже, різниця цього добутку і одиниці ділиться на 4. Інакше, серед даних чисел знайдуться хоча б два числа, остачі від ділення яких на 4 дорівнюють 3. Оскільки

$(4m+3)*(4n+3)-1=16mn+12m+12n+8=4(4mn+3m+3n+2)$, то різниця добутку цих чисел і одиниці ділиться на 4.

8 клас

1.Відповідь (див. задача №5 7 клас)

2. Враховуючи рівність діагоналей MC і PK, одержуємо, що довжина відрізка PK буде якнайменшою за умови, що CM - висота трикутника ABC. При виборі будь-якої іншої точки M_1 на гіпотенузі AB, одержимо прямокутний трикутник CMM_1, в якому CM - катет, а CM_1 - гіпотенуза. Відповідь. M – основа висоти CM.

3. $(2/9)+(4/11)+(1/7)=505/693$. Число 693 – єдине можливе серед чисел, що не перевершують 1000. Тому, загальне число каміння – 693. Частка смарагдів складає $1-(505/693)=188/693$. Відповідь. 188 смарагдів.

4. Нехай вартість всього купленого товару – x гривен, тоді, перший торговець продав весь товар за $2x$ гривен. Другий - спочатку продав чверть товару, піднявши ціну на 60%, тобто, одержав за це $1{,}6*0{,}25x$ гривен. Потім продав залишок, піднявши нову ціну ще на 40%, тобто одержав $1{,}6*1{,}4*0{,}75x$ гривен. Виходить, що другий продав весь товар за $1{,}6*0{,}25x + 1{,}6*1{,}4*0{,}75x = 0{,}4x + 1{,}68x = 2{,}04x$ (гривен). Це більше, ніж $2x$, виходить другий виручив більше грошей. Відповідь: другий торговець одержав більший прибуток.

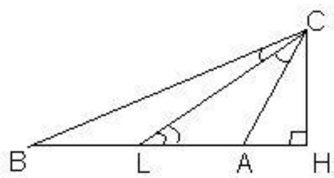
5. Нехай кожну сторону куба розпиляли на n частин. Тоді кубиками, у яких пофарбована рівно одна грань, будуть ті і лише ті кубики, які прилягають до граней початкового куба, але не містять його ребер. Неважко зрозуміти, що таких кубиків у кожної грані $(n-2)^2$, а всього кубиків, у яких пофарбована рівно одна сторона $6*(n-2)^2$. Непофарбованими залишаться ті кубики, які не мають «виходу» на поверхню початкового куба, тобто всі кубики, окрім шару товщиною в один маленький кубик. Таких кубиків буде $(n-2)^3$. Розв'язок рівняння $6*(n-2)^2=(n-2)^3$ приводить до двох відповідей n=2 або n=8. Відповідно, куб розпиляли на 8 або 512 кубиків. Відповідь. 8 або 512.

9 клас

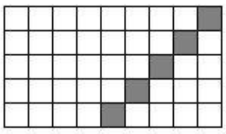
1. Відповідь. y(1)=1+a+b=2013. Отже, кожний з даних графіків проходить через точку з координатами (1;2013).

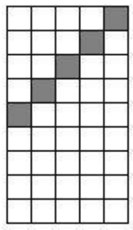
2. Розв'язання. Оскільки $0 \le \{x\} < 1$, то $x^2 < 1$, тобто $-1 < x < 1$. Якщо $x \in [0;1)$, то $x = \{x\}$, і знаходимо x=0. Для $x \in (-1;0)$ позначимо $u = \{x\}$, $0 < u < 1$, $[x] = -1$, $x = -1 + u$. Тоді з рівняння $2u^2 - 8u + 3 = 0$, з урахуванням нерівності $0 < u < 1$, одержимо $u = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$. Відповідь: $1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$;0.

3. Нехай ABC - даний трикутник, B = a, A = 120° + a. Тоді $\angle C$ = 60° - 2a. Якщо CL - бісектриса даного трикутника, то $\angle$CLA = $\angle$LCB + $\angle$LBC = (30° - a)+a = 30°. Нехай CH - висота трикутника ABC, тоді в трикутнику CLH катет CH, що лежить проти кута в 30°, в два рази менше, ніж гіпотенуза CL.



4. Відповідь: 12 фігурок. Достатньо розглянути розташування 12 таких фігурок, як показано на рис. Більше їх розташувати не можливо, оскільки 13 таких фігур складаються з 13*5=65 малих квадратиків, а великий квадрат містить їх лише 8*8=64





5. Виграє Микола. Кожним своїм ходом Микола ставить фішку на одну з клітинок відміченої діагоналі (див. малюнок). Сергій своїм ходом її звідти прибирає. Оскільки вони ходять тільки управо або вгору, то коли-небудь гра закінчиться.

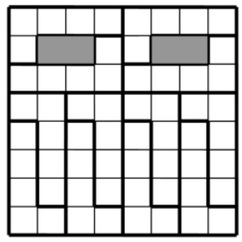


Рис.2

10 клас

1. Мінімум лівої частини співпадає з максимумом правої, і досягаються вони в одній точці x=0, що простіше всього побачити, побудувавши графіки правої і лівої частини. Відповідь. x=0.

2. Порівнюючи дане рівняння з основною тригонометричною тотожністю, робимо висновок, що воно може мати рішення лише за умови $\cos^4 3x = \pi n/2$, де $n \in N$, але, враховуючи область значень функції cos(x), одержуємо, що n=0.Відповідь. $x=\pi/6$.

3. У перетині квадратів виходить многокутник, сторони якого віддалені від центру квадратів на відстань 10. Отже, в цей многокутник можна вписати круг. Площа цього круга дорівнює $100\pi>314$. Отже, площа спільної частини квадратів більша, ніж 314.

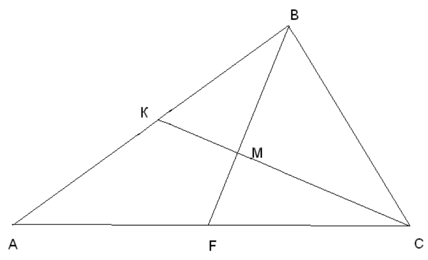
4. Розв'язання. Вихідне співвідношення рівносильне системі $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1, \\ [x]=1; \end{array}\right. \\ y \le 2-[x]. \end{cases}$ Слід зобразити множину точок $\{(x;y): 1 \le x < 2, y < 1\} \cup \{(x;1): x < 2\}$

5. Розглянемо трикутник ABC: $BC=a, AC=b, AB=c,\ b^2+c^2=5a^2$. Доведемо, що медіани $CK=m_c$,та $BF=m_b$ перпендикулярні. $m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$;

$m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$. Розглянемо ΔCMF: $CM = \frac{2}{3}m_c$, $MF = \frac{1}{3}m_b$,

$CM^2 + MF^2 = \frac{4}{9}m_c^2 + \frac{1}{9}m_b^2 = \frac{8a^2+8b^2-4c^2+2a^2+2c^2-b^2}{36} = \frac{10a^2+7b^2-2c^2}{36}$. Враховуючи умову, $b^2+c^2=5a^2$, матимемо:

$CM^2 + MF^2 = \frac{2b^2+2c^2+7b^2-2c^2}{36} = \frac{9b^2}{36} = \frac{b^2}{4} = CF^2$. Отже, ΔCMF - прямокутний ($\angle CMF = 90^\circ$).



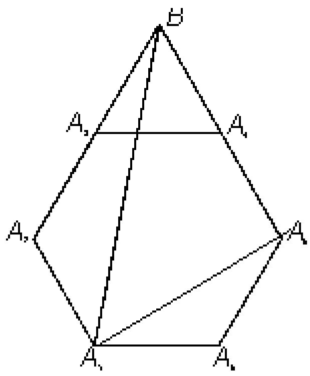
11 клас

1. Оскільки квадратне рівняння $3x^2-3^{1/2}x+1=0$ не має дійсного коріння (D<0) і старший коефіцієнт дорівнює 3, то для будь-якого x вірна нерівність $3x^2-3^{1/2}x+1>0$. Отже, для будь-якого x вірна і нерівність $x^{2012}+3x^2-3^{1/2}x+1>0$, тобто дане рівняння не має дійсного коріння.

2. Дана нерівність рівносильна нерівності: $ab+bc+ca<2c^2$, яка, у свою чергу, рівносильна нерівності $ab+bc+ca<a^2+b^2+c^2$ (теорема Піфагора). Для доведення останньої нерівності розглянемо і перетворимо різницю між його правою і лівою частиною: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = (1/2)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) = (1/2)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \ge 0$. Оскільки a, b і c - сторони прямокутного

трикутника (який не може бути рівностороннім), та остання нерівність - строга. Таким чином, виконується і початкова нерівність.

3. Нехай $A_1A_2...A_6$ - даний правильний шестикутник. Продовживши його сторони A_2A_3 і A_5A_4 до перетину в точці B, одержимо шуканий відрізок A_1B (див. мал.). Довести, що цей відрізок дорівнює $7^{1/2}$ можна, наприклад, з того, що $\triangle A_3A_4B$ – рівносторонній витікає, що $A_2B = A_5B = 2$. Далі, або застосовуємо теорему косинусів для трикутника A_1A_2B зі сторонами 1 і 2 і кутом 120°, або з трикутника $A_1A_5A_6$ за теоремою косинусів знаходимо, що $A_1A_5 = 3^{1/2}$, а потім, застосовуємо теорему Піфагора для трикутника A_1A_5B ($\angle A_1A_2B = 90^\circ$).



4. Розв’язання. Легко помітити, що $f(x) = (x-4)^2 + 4$. Тоді рівняння $f(f(x)) = 5$ рівносильне рівнянню $(x-4)^4 + 4 = 5$, або $(x-4)^4 = 1$, звідки $x - 4 = \pm 1$, тобто $x = 3$ або $x = 5$. Відповідь: $x = 3,\ x = 5$.

5. Нехай $x = 2+a,\ y = 2+b,\ z = 2+c$, де a, b, c додатні. Тоді заданий вираз перепишеться так:

$$\frac{x^4}{(y-2)(z-2)} + \frac{y^4}{(x-2)(z-2)} + \frac{z^4}{(y-2)(x-2)} = \frac{(a+2)^4}{bc} + \frac{(b+2)^4}{ca} + \frac{(c+2)^4}{ab}$$

Застосовуючи нерівність Коші, одержимо

$$\frac{(a+2)^4}{bc} + \frac{(b+2)^4}{ca} + \frac{(c+2)^4}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+2)^4}{bc} \cdot \frac{(b+2)^4}{ca} \cdot \frac{(c+2)^4}{ab}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\left(2\sqrt{2a}\right)^4 \left(2\sqrt{2b}\right)^4 \left(2\sqrt{2c}\right)^4}{a^2b^2c^2}} = 192$$

При $a = b = c = 2$, тобто $x = y = z = 4$, даний вираз дорівнює 192, тобто це і є найменше значення. Відповідь. 192.