**2-й етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2014 р.**

**Відповіді та вказівки.**

**6 клас** 1. Відповідь. 900.

2. Відповідь. Застосуємо принцип Діріхле. У році 12 місяців, отже 37 : 12 = 3 (ост. 1). Тобто, протягом місяця у класі відмічають три дня народження, а так як один учень залишився в остачі, то протягом одного з місяців день народження відмічають четверо учнів. Що й треба було довести.

3. Відповідь. Не можна. Найменші можливі суми квадратів 10 цілих чисел рівні 385 і 406 (Не рівні 400).

4. Відповідь. Не існує. Очевидно, що таке число не більше 250. Тому першою цифрою може бути 1 або 2. Обидва припущення при перевірці приводять до протиріччя: для запису такого числа треба чотири різні цифри.

5. Відповідь. Очевидно, що кількість білих кульок або не змінюється, або зменшується на 2. Тому залишитися може тільки червона кулька.

**7 клас** 1. 2014.

2. Відповідь. Бабусі вийшли в дорогу о 6 годині ранку.

3. Відповідь. Нехай – довжина кроку високого учня,  – кількість кроків, зроблених ним за одиницю часу. Тоді пройдений ним за цей час шлях дорівнює *ln*. Відповідно низенький учень пройде лише шлях .Отже високий прийде швидше.

4. Відповідь. Не існує. Очевидно, що таке число не більше 2500. Тому першою цифрою може бути 1 або 2. Далі одержуємо два можливі набори цифр, з яких не можна скласти число, яке ділиться на 3.

5. Відповідь. Виграє перший. Спочатку він бере 1 кульку і далі кожного разу доповнює кількість кульок, які взяв другий до 11*.* Це забезпечує йому перемогу, бо 2013 ділиться на 11.

**8 клас** 1. Відповідь. 12. Приведемо дане рівняння до такого виду: . Тепер враховуємо, що *y-1* буде натуральним дільником *2016*. А кількість таких дільників можна підрахувати з умови: *2016 = 1×2×2×2×2×2×63*.

2. Відповідь. Нехай він купив коня за *х* пістолів. Маємо рівняння:. Маємо два розв’язки: *х1=40, х2=60.*

3. Відповідь. Від обох частин рівності віднімемо СУК. Одержимо: СУК × (СУК-1) = БАР × 1000. Два послідовні натуральні числа СУК і СУК-1 взаємно прості, а їх добуток ділиться на 1000 = 53 × 23. Тому одне з них ділиться на 125, але не ділиться на 2. А друге ділиться на 8, але не ділиться на 5. Трьохзначні непарні числа, які діляться на 125, це 125, 375, 625 і 875. Серед сусідніх з ними чисел на 8 діляться тільки 376 і 624. Перевірка показує, що підходить тільки друге число. Отже маємо: 625 × 625 = 390625.

4. Відповідь. Не можна. На поверхні кубика Рубика всього 54 квадратиків (тобто, якщо путь із діагоналей існує, то він складається з 54 діагоналей) і 56 точок, через які цей путь може проходити. Отже, через одну з цих точок путь проходити не може, тобто, в квадратах, які «оточують» цю точку, проведені діагоналі, які утворюють замкнений цикл (довжини 3 або 4), і путь має самоперетин.

5. Відповідь. Виграє перший. Спочатку він бере 1 кульку і після свого другого ходу залишає в скриньці 2010 кульок*.* Далі, на любий хід другого він бере 1 кульку, а другим ходом досягає того, щоб за дві пари ходів кількість кульок зменшилась на 5 і т.д.

**9 клас** 1. Відповідь. *а=1.*

2. Вказівка. Скористатися нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним.

3. Відповідь. 1 дм. Скористатися умовою, що дотичні до кола, проведені з однієї точки, рівні і подібністю прямокутних трикутників.

4. Відповідь. Позначимо задані точки М1, М2, …, М2014. Розглянемо на колі дві довільні діаметрально протилежні точки Р1 і Р2. Враховуючи, що Р1Р2 = 2, відповідно до нерівності трикутника, для довільної точки Мі маємо: МіР1+МіР2 ≥ 2. Додавши такі нерівності для всіх точок, одержимо:. Отже, принаймні одна з вказаних сум у лівій частині нерівності не менше 2014.

5. Відповідь. Див. задачу № 5 8 класу.

**10 клас**

1. Відповідь. Скористаємося тим, що для довільного *n*, яке задовольняє нерівність *1 ≤ n ≤ 2014*, виконується нерівність . Склавши відповідні нерівності одержимо: , звідки легко одержати шукану нерівність.

2. Вказівка. Треба розглянути вписані чотирикутники *ABNL* і *BCMN* і скористатися властивістю, що сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює *π*.

3. Відповідь. Представимо *х* у вигляді: *х=n+α*, де *n=[x]*, а *α={x}*. Тоді вихідна рівність перетвориться у наступну: *55n+99α=19*, або *55n=19-99α*. Але *0≤α<0,* тобто *-80<19-99α≤19*. З останніх двох рівностей маємо: -80<19-55n ≤19, або . Існують тільки два цілих значення числа *n*, які задовольняють останню нерівність: *n=-1* або *n=0*. Далі з рівності *55n+99α=19* знаходимо два значення для *α*: *74/99* або *19/99*. Їм відповідають два значення *х*: *х=-1+74/99=-25/99* або *х=0+19/99=19/99*.

4. Відповідь.. Див. задачу № 4 9 класу.

5. Відповідь. Оскільки  то  и тому  можна подати у вигляді , оскільки , то  и тому  має вид . Аналогічно  маємо , звідси  и тому функцію  можна подати у вигляді . При заданих умовах . Тобто.

**11 клас**

1. Відповідь. Можна. Великі квадрати наклеюють на дві протилежні грані, а кути загинають на суміжні. Маленькі квадрати наклеюють так, щоб їх діагоналі співпадали с непокритими ребрами.

2. Відповідь. . Треба від кожного куска відрізати по 4 кг.

3. Відповідь. 15 і 5 золотих. Треба підрахувати ймовірності перемоги кожного з гравців.

4. Відповідь. Застосуємо заміну , маємо рівняння: . Тоді . Позначивши  через , одержимо , де . Очевидно, що функція  задовольняє вихідне рівняння (переконуємося в цьому, зробивши перевірку). Тобто , де .

5. Відповідь. Нехай . Нехай1. Вказівка. Треба розглянути вписані чотирикутники *ABNL* і *BCMN* і скористатися властивістю, що сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює *π*.

, тоді . Нехай також . Тоді маємо: , , . Але за умовою і  повинно бути повним квадратом. Найменші значення для  дають наступні трійки шуканих чисел: (16, 0, 9), (32, 32, 17), (80, 320, 41).